「41」から始める2021年

41は素数

昨年のプロ野球は、またしても福岡ソフトバンクホークスが日本一となりました。大活躍した千賀滉大投手は最優秀防御率(2.16)、最多勝(11)、最多奪三振(149)の投手3冠に輝いています。

サッカーJリーグでは、川崎フロンターレが優勝、そのままの勢いで天皇杯も制しました。ミッドフィルダーの家永昭博選手は、優勝を決めたガンバ大阪戦ではハットトリック、柏レイソルとの最終戦でも 2 得点を挙げ、今シーズンのベストイレブンにも選出されました。

ともに背番号は「41」です。

スポーツ選手の背番号としては大きい数字ですが、日本ハムファイターズ時代の稲葉篤紀選手やFC東京時代の久保建英選手など印象深い選手がつけています。

突然ですが、「41」は素数です。

18世紀最大の数学者レオンハルト・オイラーにより、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}^2 + \boldsymbol{n} + 41 \qquad (n = 0,1,2,3,\cdots\cdot)$$

の形で書ける素数をオイラー素数と呼びます。

確かに、

$$\boldsymbol{E(0) = 41}$$
$$\boldsymbol{E(1) = 43}$$
$$\boldsymbol{E(2) = 47}$$
$$\boldsymbol{E(3) = 53}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

と、素数が現れます。

残念ながら n ＝ 41 では41の倍数になるので素数ではありません。

すぐ気が付きますが、

$$\boldsymbol{n}^2 + \boldsymbol{n} + 41 = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} + 1) + 41$$

なので n ＝ 40 でも素数にはなりません。

<u>素数は無限個</u>

「素数は無限個存在する」ことは紀元前のユークリッドの「原論」で示されていていますが、背理法を使ったシンプルな証明としてよく知られています。

（ユークリッド）
　素数が有限個しか存在しないと仮定し、
すべての素数を $\boldsymbol{p_1, p_2, \cdots, p_n}$ とする。このとき、

$$\boldsymbol{P = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1}$$

を考える。 $\boldsymbol{P}$は 2 以上の自然数なので素数を約数としてもつが、
$\boldsymbol{p_i}$ $(\boldsymbol{i = 1, 2, \cdots, n})$で割るとすべて1余り、約数を持たない。
これは、最初に素数が有限個しかないと仮定したことにより矛盾が生じた。
したがって素数は無限個存在することが証明された。

（Q.E.D.）

一見、素数を順番にかけて 1 をたすと新たな素数となるような気がしますが、
実際に計算してみると、

$$2 \times 3 + 1 = 7$$
$$2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$$
$$2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211$$
$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1 = 2311$$

と、ここまでは全て素数ですが、

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30031 = 59 \times 509$$

となり、急に大きな素数が出現して約数になってしまいます。
先の証明では「素数が有限個しか存在しない」ので「全部かける」ことができ、矛盾が生じたのですね。

たし算とかけ算

　ある整数とそれに 1 をたした二つの整数を考えます。つまり、隣り合った整数を考える訳です。

　一般に「共通の約数が 1 以外にはない」ことを 「互いに素」といいます。

（隣り合った整数は互いに素である）

　隣り合う整数を

$$n \text{ と } (n+1)$$

とし、共通の約数があるとしてこれを k とすると

$$n = ka \quad , \quad n+1 = kb \quad (a, b \text{ は整数})$$

と書け、辺々を引くと

$$(n+1) - n = k(b-a)$$

左辺が1なので、

$$1 = k = b - a$$

つまり共通な約数は 1 しかない。

(Q.E.D.)

　共通の約数を持たないということは、それぞれの数を素因数分解したときに、共通の素因数を持たないということです。例えば、

$$15 = 3 \times 5$$
$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

「たし算の世界」で隣り合っている数が「かけ算の世界」では全く異なる顔をしているのがわかります。

21 世紀になって

　よく知られたこの事実を使って、ユークリッドから2000年以上経った 21 世紀になって、「素数は無限個存在する」ことのシンプルで新しい証明が発見されました（注 1）。

（サイダック　2006年）
　n_1を 2 以上の整数とする。
　このとき、 n_1 と $n_1 + 1$ は互いに素なので、

$$n_2 = n_1(n_1 + 1)$$

の約数には、少なくとも二つ以上の異なる素数が含まれる。同様に、

$$n_3 = n_2(n_2 + 1)$$

とおくと、n_3の約数には少なくとも三つの異なる素数が含まれる。
このようにして、いくらでも異なる素数を約数とする整数を見つけることができる。
したがって、素数は無限個存在することが証明された。

（Q.E.D.）

　この証明は背理法を使わず、構成的であることが嬉しいですね。でも、何世紀にもわたって多くの数学者が言及していなかったのも不思議です。
　Flip Saidak さんは現在ノースカロライナ大学の准教授です。

2021年へ

オイラー素数に戻って、この式の凄いところは n = 39 までは全て素数になることです。
n = 40,41 に続いて、

$$\boldsymbol{E(42) = 1847}$$
$$\boldsymbol{E(43) = 1933}$$

と、またしても素数になります。

今年は 2021年21世紀生まれの人たちがハタチになるのですね。
2021はいかにも素数のような姿をしていますが、実は、

$$\mathbf{2021} = \mathbf{43} \times \mathbf{47} = \boldsymbol{E(1)} \times \boldsymbol{E(2)}$$

オイラー素数の n = 1 と n = ２ の時の積になっています。
さらに驚くことに、n = 44 を計算してみると

$$\boldsymbol{E(44)} = \mathbf{44^2} + \mathbf{44} + \mathbf{41} = \mathbf{2021}$$

良い年になりますように。

（注1） Filip Saidak. ”A New Proof of Euclid’s Theorem.”
The American Mathematical Monthly, Vol.113, 2006.

（注2） $\boldsymbol{E(45)}$以降も素数が続いていますね。

（H41）