

1. 論文書誌情報

Y. Tanaka. “Designing Aperture 2^{2k} Hexagonal Grids and their Indexing as Factor Rings of Eisenstein Integers,” *Theoretical Computer Science* 982 (2024) 114257

Theoretical Computer Science(通称 TCS)はコンピュータサイエンスにおける理論研究専門のトップ・ジャーナル。

論文は以下のサイトで閲覧可能。PDF 版も無料でダウンロード可能。上記の論文書誌情報を付加すれば再配布も可能。

[https://authors.elsevier.com/sd/article/S0304-3975\(23\)00570-4](https://authors.elsevier.com/sd/article/S0304-3975(23)00570-4)

この巻は今後まだ論文の追加があり、先頭ページなどは今後決定される。

著者の田中譲は北海道リージョナルリサーチの CPS 研究室長で、北海道大学情報科学研究所の名誉教授であると共に、つくばにある総合科学研究機構・総合科学研究センターにも籍を置いている。本論文は都市規模で多数の車などの移動体の実時間軌跡モニタリングを同時に行うシステムを構築する際に最大の課題となる通信コストを著しくローコスト化することを目指し、SONY の“ELTRES” LPWA 技術を用いてシステム開発を行う中で、ELTRES 端末の 1 分間に最大 128 ビットのデータ転送という極めて厳しい通信容量の制限下において、どうすれば高頻度かつ高精度の位置サンプリングで軌跡取得と転送が可能になるかという極めて現実的な課題の解決を目指して、2 年半前から新たに開始された理論研究の成果である。この成果は、既に公開している札幌マラソンにおける 2 人の走者の実時間軌跡取得実証実験などにおいてその有効性が示されている。

2. 内容の概要

六角形格子は 2 次元空間において任意の位置を離散化（量子化）して表現する場合には、他の正方格子などの格子座標系と比べると、対称性が最も高く、等方的に格子点間の距離を均一に保つという特徴があることから、近年、地図の格子座標系として用いられるようになってきた。その大きな契機は、Uber 社が六角形格子座標系を用いた地理情報システムを自社の基盤として採用し、開発したシステムのオープン版を H3 として 2018 年に公開したことによる。地図のようなシステムでは拡大縮小により、分解能を自在に変える必要性があり、いくつかの六角形をまとめて一つの大きな六角形と面積が同じになるように尺度を変える操作が行われる。この際にグループにまとめ上

げられる離接する六角形の集合と、その集合と同じ面積を持つ大きな六角形を共に口径と呼ぶ。口径内の小さな六角形の個数は口径のサイズと呼ばれる。

従来の六角形格子では、サイズが 3、4、7、9 の 4 種類の口径のみが提案されていた。口径内の各六角形には 0 から (口径サイズ) - 1 までの番号を付与して小さな各六角形を識別できるようにする必要がある、この番号をインデクスと呼ぶ。従来はサイズの小さな口径のみが考えられていたので、インデクスの割り振りは表で定義していた。格子点座標とインデクスの間には何らの数学的な関係も付けられていなかった。このようなことから、大きな領域を考える場合には、これらの小さな口径を階層的に組み合わせるしかなかった。さらにその場合の全体としてのインデクスの付与は複雑であった。

根本的な問題は、このようなアプローチには六角形格子独自の数学的基盤が無く、そのためにシステムは開発されているものの、その上での幾何学的操作や分解能の変更に関する数学的理論基盤が無いことである。これが更なる発展の大きな障害となっていた。本論文は、六角形格子を Eizenstein 整数と呼ばれる整数環の理論によって定式化し、その口径と、口径内格子点のインデクス空間を、Eizenstein 整数環における 2 つの剰余環として定式化することにより、これらの間の同型写像によりインデクス付与を定式化することに成功した。特に口径を 2 の偶数乗に限定することにより、インデクスが各軸の整数座標の 2 の補数表現に他ならないことを示し、計算機上での実現に極めて適した定式化であることを示した。この考えの 3 次元への拡張や、地球を覆う球面上の六角形格子座標 (常にこの内の 12 個の六角形は五角形になる) へ拡張した DGGS (Discrete Global Grid System) への拡張も明らかにした。

応用として、1000 万台の移動体の軌跡を海上も含めた日本国土全体を含む広大な領域でモニタリングするとして、最大誤差 1 m、サンプリング時間を 3 秒で、最大時速 260km にまで対応し、通信欠落があったとしても 1 分以内に回復するような仕様で実時間モニタリングする場合に必要な総通信容量の試算を行ってみた。従来このような実時間データの集合はビッグデータの典型と考えられており、これを実時間で複数のコンピュータ間で共有することなどは不可能と考えられてきた。提案した六角形格子の理論を用いて適切に軌跡の量子化を行うと、これに必要な総通信容量は 60.34Mbps と試算できる。この値は今日普通に使われている WiFi でのインターネット接続のダウンロードの通信容量 100Mbps 程度より小さい。これは従来の常識を覆す結果になっている。

本論文により、数学的理論基盤が初めて与えられたことにより、六角形格子を用いた空間の量子化とその応用の研究開発に今後一層拍車がかかることを期待している。